Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas

Examen de Análisis Matemático I – Febrero 2013

1. Prueba que el espacio $(\mathcal{B}(A), \| \ \|_\infty)$ es completo.
2. Estudia si el campo escalar definido por:

$$f(x,y) = \frac{x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x}{x^2 + y^2}, \quad f(0,0) = 0$$

   es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$. Calcula $D_{12} f(0,0)$ y $D_{21} f(0,0)$ e indica si es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

   Sugerencia. Como $f(x,y) = -f(y,x)$ es $D_1 f(x,y) = -D_2 f(y,x)$, por lo que basta probar que $D_1 f(x,y)$ es continua.

3. Justifica que existen dos campos escalares u y v definidos en un entorno abierto U del punto $(1,-1)$ verificando que $u(1,-1) = v(1,-1) = (1,1)$ y para todo $(x,y) \in U$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^3 + y^3 + u(x,y)^3 - v(x,y)^3 & = & 0 \\ x^2 + y^2 - 2u(x,y)v(x,y) & = & 0 \end{array} \right.$$

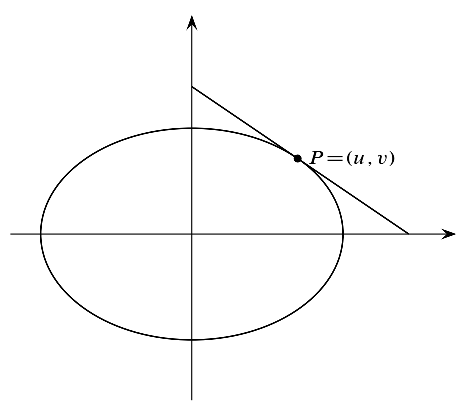
   Sea $(s,t) \mapsto f(s,t)$ un campo escalar de clase $\mathcal{C}^2$ definido en un entorno abierto de $(1,1)$ y definamos $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$. Calcula $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(1,-1)$ sabiendo que $D_1 f(1,1) = 2$, $D_2 f(1,1) = 2$, $D_{12} f(1,1) = -1$.

   Sugerencia. Calcula $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y)$ y sustituye $(x,y) = (1,-1)$ lo que te indicará las derivadas parciales de u y v que necesitas calcular. No faltan datos.

4. Utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular el área del triángulo de mínima área cuyos lados son los segmentos de los ejes coordenados positivos interceptados por la tangente a la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   en un punto $P = (u,v)$ de la misma situado en el primer cuadrante y dicho segmento de la tangente.



5. Condición suficiente de diferenciabilidad de un campo escalar.